Αλγεβρικές Δομές Ι 3/3/2017

Έστω $f: X \to Y$ μια απεικόνιση

Έννοια 1-1

① Η f είναι 1-1 $\Leftrightarrow \forall x, y \in X: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Έννοια επί

② Η f: επί $\Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν η απεικόνιση είναι 1-1 και επί τότε υπάρχει απεικόνιση $g: Y \to X$ έτσι ώστε: $g \circ f = Id_X$ και $f \circ g = Id_Y$

Έννοια της αντίστροφης

Μια τέτοια απεικόνιση g που ικανοποιεί τις παραπάνω δύο ιδιότητες είναι μοναδική, καλείται αντίστροφη της f και συμβολίζεται με f^{-1}

$\forall y \in Y$, $g(y)$ = το μοναδικό (αφού η f είναι 1-1) στοιχείο $x \in X$: $f(x) = y$ (αφού είναι επί η f)

Ορισμός: Δύο σύνολα X και Y θα λέμε ότι έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων και θα γράφουμε $|X| = |Y| \Leftrightarrow$ υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f: X \to Y$

Έννοια του πότε δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων και συμβολισμός

Γενικά θα συμβολίζουμε με $|X|$ το πλήθος στοιχείων ενός συνόλου X

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $\mathbb{N}_{[k]} = \{1, 2, \dots, k\}$

"πεπερασμένα σύνολα"

Το σύνολο X καλείται πεπερασμένο αν και μόνον αν είτε είναι το $\emptyset$, οπότε θα έχουμε $|X| = 0$, είτε υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $f: X \to \mathbb{N}_{[k]}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, και τότε θα έχουμε $|X| = k$

Γενικά αν το X είναι πεπερασμένο, θα γράφουμε $|X| < \infty$

"άπειρο σύνολο"

Το σύνολο X καλείται άπειρο $\Leftrightarrow$ το X δεν είναι πεπερασμένο και τότε θα γράφουμε $|X| = \infty$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω X: πεπερασμένο σύνολο και $Y \subseteq X$ τότε

Y: πεπερασμένο και $|Y| < |X| \Leftrightarrow Y \neq X$

(αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο - υποθέτουμε ότι υπάρχει στοιχείο $z \in X$ και $z \notin Y$ και με εύρεση 1-1 και επί απεικόνισης)

Πρόταση: Έστω $f: X \to Y$ μια απεικόνιση μεταξύ πεπερασμένων συνόλων και έστω ότι $|X| = |Y|$ (Αρχή του Περιστερώνα)

① Αν f: 1-1, τότε f: επί

② Αν f: επί, τότε f: 1-1

① Η απεικόνιση f επάγει μια νέα απεικόνιση $\tilde{f}: X \to f(x)$, $\tilde{f}(x) = f(x)$

Προφανώς η $\tilde{f}$ είναι 1-1, διότι η f είναι 1-1, και η $\tilde{f}$ είναι επί από την κατασκευή της.
Τότε: $|X| = |f(x)|$. Όμως $f(x) \subseteq Y$ και άρα $|f(x)| \leq |Y|$,

$\Rightarrow |f(x)| = |Y| \xrightarrow{\text{ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ}} f(x) = Y \Rightarrow f$ επί

ΤΕΛΟΣ της Απόδειξης

Το ② αποδεικνύεται ανάλογα (άσκηση)

ΑΣΚΗΣΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

① Έστω η απεικόνιση

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right]$$

Τότε η f: 1-1 κ' επί (ΑΣΚΗΣΗ) Άρα $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \infty$

Όμως $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ και $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$

② Θεωρούμε το υποσύνολο $2\mathbb{Z} = \{2n \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$

Προφανώς $2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$, όμως $|2\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}|$, διότι η απεικόνιση

$f: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $f(n) = 2n$ είναι 1-1 κ' επί

③ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ και $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ διότι η απεικόνιση

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n,m) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + n$$

είναι 1-1 και επί (ΑΣΚΗΣΗ)

Ένα σύνολο X καλείται αριθμήσιμο $\Leftrightarrow$ είτε είναι πεπερασμένο, είτε $|X| = |\mathbb{N}|$.
Διαφορετικά το X καλείται υπεραριθμήσιμο

"αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα"

$\underbrace{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}}_{\text{αριθμήσιμα σύνολα}},\ \underbrace{\subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}}_{\text{υπεραριθμήσιμα}}$ $\qquad |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Έστω X: σύνολο ($\neq$ κενό). Μια σχέση επί του X είναι ένα υποσύνολο $R \subseteq X \times X$. (R: Σχέση επί του X.)

① Η σχέση R καλείται ανακλαστική $\Leftrightarrow \forall x \in X$. $(x,x) \in R$

② Η σχέση R καλείται συμμετρική $\Leftrightarrow$ ~~...~~ $\forall (x,y) \in X \times X$:
$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

③ Η σχέση R καλείται μεταβατική $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in X$:
$\left.\begin{matrix}(x,y) \in R \\ (y,z) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,z) \in R$

④ Η σχέση R καλείται αντισυμμετρική
$\Leftrightarrow \forall x,y \in X$ $\left.\begin{matrix}(x,y) \in R \\ (y,x) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$

Ιδιότητες
✓ ανακλαστική
✓ συμμετρική
✓ μεταβατική
✓ αντισυμμετρική

Ορισμός:

① Η σχέση R επί του X καλείται σχέση ισοδυναμίας επί του $X \Leftrightarrow$ ικανοποιεί τις ιδιότητες ①, ②, ③

② Η σχέση R επί του X καλείται σχέση μερικής διάταξης επί του X $\Leftrightarrow$ ικανοποιεί τις ιδιότητες ①, ③, ④

"Σχέση ισοδυναμίας και σχέση μερικής διάταξης"

Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας επί του ($\neq$ κενό) συνόλου X.
Αν $x,y \in X$ και $(x,y) \in R$, θα γράφουμε:
$x R y$ ή $x \underset{R}{\sim} y$ ή $x \equiv y (R)$

Συμβολισμός

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $n \geq 1$ και ορίζουμε μια σχέση R_n επί του $\mathbb{Z}$ ως εξής:
$\forall x,y \in \mathbb{Z}$: $x \underset{R_n}{\sim} y \Leftrightarrow n \mid x-y \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod n)$

Τότε η σχέση R_n είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Z}$ η οποία καλείται σχέση ισοτιμίας mod n

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Στη συλλογή όλων των συνόλων $\underline{S}$ ορίζουμε μια σχέση R ως εξής:
Αν X, Y: σύνολα, τότε $X \underset{R}{\sim} Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$
Τότε η σχέση R είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί της $\underline{S}$

$\left.\begin{matrix}|X| = |Y| \\ |Y| = |Z|\end{matrix}\right| \Rightarrow |X| = |Z|$

$X \underset{R}{\sim} Y \Rightarrow |X| = |Y| \Rightarrow X \xrightarrow[1-1 \text{ και επί}]{f} Y \Rightarrow Y \xrightarrow[\text{επί και } 1-1]{f^{-1}} X \Rightarrow$

$\Rightarrow |Y| = |X| \Rightarrow Y \underset{R}{\sim} X$

$X \underset{R}{\sim} X$, διότι $|X| = |X|$ $(X \xrightarrow{Id_X} X)$

"Κλάση ισοδυναμίας"

Η κλάση ισοδυναμίας του $x \in X$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$[x]_R = \{y \in X \mid y \sim_R x\} = \{y \in X \mid x \sim_R y\}$$

Το σύνολο

$$X/R = \{[x]_R \subseteq X \mid x \in X\}$$

καλείται σύνολο-πηλίκο του Χ ως προς τη R "σύνολο-πηλίκο"

$$[x]_R = [y]_R \not\Rightarrow x = y$$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

① $\forall x, y \in X: x \sim_R y \iff [x]_R = [y]_R$

② $\forall x, y \in X$: είτε $[x]_R = [y]_R$ είτε $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ μ περο?

③ $\forall x \in X: [x]_R \neq \emptyset$

④ $X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$

Απόδειξη.

③ $\forall x \in X: x \sim_R x \Rightarrow x \in [x]_R$. Άρα: $[x]_R \neq \emptyset, \forall x \in X$ (λόγω ανακλαστικής)

④ $X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_R \subseteq X$. Άρα: $X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$

① Έστω $x, y \in X$

"$\Rightarrow$" Έστω $x \sim_R y$. Έστω $z \in [x]_R$ (θα δείξω ότι $z \in [y]_R$)

$\Rightarrow z \sim_R x$

Όμως $x \sim_R y$ $\Rightarrow z \sim_R y \Rightarrow z \in [y]_R$

Άρα $[x]_R \subseteq [y]_R$. Παρόμοια $[y]_R \subseteq [x]_R$

Άρα $[x]_R = [y]_R$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $[x]_R = [y]_R$. Τότε $x \in [x]_R = [y]_R \Rightarrow x \in [y]_R \Rightarrow x \sim_R y$

② Υποθέτουμε ότι: $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Τότε $\exists\, z \in X$

$$z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow \begin{cases} z\in[x]_R \\ \text{και} \\ z\in[y]_R \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z \sim_R x \\ z\sim_R y \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\sim_R z \\ z\sim_R y \end{matrix}\right| \Rightarrow x \sim_R y$$

Τότε από το ① $\Rightarrow [x]_R = [y]_R$ ← Τέλος απόδειξης

Ορισμός: Έστω ένα μη-κενό σύνολο X. Τότε μια συλλογή υποσυνόλων "διαμέριση"
$\Delta = \{A_i \subseteq X \mid i\in I\}$ του X καλείται διαμέριση του X
$\iff$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

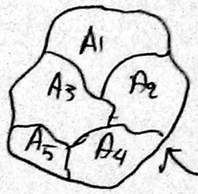
① $\forall i\in I: A_i\neq\emptyset$

② $\forall i,j\in I$: είτε $A_i = A_j$ $(i=j)$ είτε $A_i\cap A_j=\emptyset$

③ $X = \bigcup_{i\in I} A_i$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν R σχέση ισοδυναμίας επί του X, τότε: η συλλογή υποσυνόλων $X/R = \{[x]_R \subseteq X \mid x\in X\}$ είναι μια διαμέριση του X.

Έστω $\Delta = \{A_i \in X \mid i\in I\}$ διαμέριση του X



Ορίζουμε μια σχέση R_Δ επί του X ως εξής:
$\forall x,y\in X: x\sim_{R_\Delta} y \iff \exists\, i\in I: x,y\in A_i$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η σχέση R_Δ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X

Απόδειξη ①: Επειδή $X = \bigcup_{i\in I}A_i \Rightarrow \forall x\in X,\ \exists\, i\in I: x\in A_i \Rightarrow x\sim_R x$

② Έστω $x,y\in X$ και ότι $x\sim_{R_\Delta} y \Rightarrow \exists\, i\in I: x,y\in A_i \Rightarrow$
$\Rightarrow y,x\in A_i \Rightarrow y\sim_{R_\Delta} x$

③ Έστω $x,y,z\in X$ και έστω ότι: $\begin{cases} x\sim_{R_\Delta} y \Rightarrow \exists\, i\in I: x,y\in A_i \\ y\sim_{R_\Delta} z \Rightarrow \exists\, j\in I: y,z\in A_j \end{cases}$

$\Rightarrow y \in A_i \cap A_j$. Αυτό ~~[illegible]~~ έπεται σα ισχύει μόνο αν $i=j$ και τότε:

$x, z \in A_i = A_j$ και άρα: $x \sim_{R_\Delta} z$

Άρα η R_Δ σχέση ισοδυναμίας επί του X

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Οι απεικονίσεις $\quad \Phi: R \mapsto X/R$

$$\Sigma = \{\text{σχέσεις ισοδυναμίας } R \text{ επί του } X\} \rightleftarrows \{\text{Διαμερίσεις } \Delta \text{ επί του } X\} = D$$

είναι η μία αντίστροφη της άλλης. $\quad R_\Delta \leftarrow\!\shortmid \Delta : \Psi$

Πρέπει ν.δ.ο.:

α) $\forall R \in \Sigma : \Psi(\Phi(R)) = R$

β) $\forall \Delta \in \Theta : \Phi(\Psi(\Delta)) = \Delta$

Απόδειξη Θεωρήματος

Για το α

$$\Phi(R) = X/R = \{[x]_R \subseteq X \mid x \in X\}$$

Τότε η ~~διαφορά~~ σχέση ισοδυναμίας $\Psi(\Phi(R))$: $\forall x, y \in X: x \sim_{R_{\Phi(R)}} y \Leftrightarrow \exists$ σύνολο της διαμέρισης

το οποίο περιέχει τα $x, y \Leftrightarrow \exists z \in X, x, y \in [z]_R \Rightarrow x \sim_R z \Leftrightarrow$

$y \sim_R z$

$\Leftrightarrow x \sim_R y$. Άρα $R = \Psi(\Phi(R))$

Τέλος απόδειξης του α

Απόδειξη του β

Έστω $\Delta = \{A_i \subseteq X \mid i \in J\}$ διαμέριση του X

$\forall x, y \in X: x \sim_{\Psi(\Delta)} y \Leftrightarrow \exists i \in J: x, y \in A_i$

$$[x]_{\Psi(\Delta)} = \{y \in X \mid y \sim_{\Psi(\Delta)} x\} = \{y \in X \mid y, x \in A_i, i \in J\} =$$

$= \{y \in X \mid y \in A_i$, όπου $i =$ ο μοναδικός δείκτης $i \in J : x \in A_i\} =$

$= A_i$, όπου i: ο μοναδικός δείκτης $i \in J: x \in A_i$

β Άρα $X/R = \{[x]_{\Psi(R)} \subseteq X\} = \{A_i \subseteq X \mid i \in J\} = \Delta$ $\quad // \Phi(\Psi(\Delta))$ Τέλος απόδειξης του β